Correction DS 9 G

Exercice 1 *d'après Amérique du nord mai 2014*

Partie A : Conditionnement des pots

1. D'après la calculatrice $p(X \leqslant 98) \approx 0,202$ à 10^{-3} près.
   La probabilité qu'un pot de crème soit non conforme vaut environs 0,202 à 10^{-3} près.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. D'après la calculatrice, une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,04$ est $u \approx -1,751$.
   c. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} p(X \leqslant 98) = 0,04 \quad &\Leftrightarrow \quad p(X-100 \leqslant -2) = 0,04 \\ &\Leftrightarrow \quad p\left(\frac{X-100}{\sigma'} \leqslant -\frac{2}{\sigma'}\right) = 0,04 \\ &\Leftrightarrow \quad p\left(Z \leqslant -\frac{2}{\sigma'}\right) = 0,04 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{\sigma'} = -1,751 \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma' = \frac{2}{1,751} \approx 1,142 \end{aligned}$$
   La valeur attendue de σ' est donc $1,142$.
3. **a.** On a une épreuve de Bernoulli qui consiste à tester si un pot est non conforme de probabilité $0,04$.
   On répète 2000 fois cette épreuve de façon indépendante. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de pots non conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0,04$.
   b. Son espérance vaut : $\mu'' = np = 2000 \times 0,04 = 80$
   Son écart type vaut : $\sigma'' = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2000 \times 0,04 \times 0,96} = \sqrt{76,8} \approx 8,764$.
   c. Comme $n = 2000 > 30$, $np = 80 > 5$ et $n(1-p) = 1920$ on peut utiliser le théorème de Moivre-Laplace :
$$\begin{aligned} p(Y \leqslant 70) &= p(Y \leqslant 70,5) \qquad \text{correction de continuité} \\ &= p\left(\frac{Y-\mu''}{\sigma''} \leqslant \frac{70,5-80}{\sqrt{76,8}}\right) \\ &\approx p(Z' \leqslant -1,084) \text{où } Z' \text{suit la loi } \mathcal{N}(0;1) \\ &\approx 0,139 \end{aligned}$$
   La probabilité que la boutique reçoive au plus 70 pots non conformes vaut environ 0,139.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 150 > 30$, $f = \dfrac{99}{150}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 51 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $\left[0,578; 0,741\right]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

On peut estimer que la proportion de personnes satisfaites est comprise entre 57,8% et 74,1%

Exercice 2 *Asie juin 2014*

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$, $1 + x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.
   Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   D'après le graphique, le domaine se rapproche du carré d'une unité de côté, l'aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. Si on pose $u(x) = 1 + x^n$, on remarque que $\dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ or $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{u'}{u}$ donc

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

3. **a.** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$ on a :

$$\begin{aligned} x^n &\geqslant 0\\ 1+x^n &\geqslant 1\\ \frac{1}{1+x^n} &\leqslant 1 \quad \text{car la fonction inverse est décroissante}\end{aligned}$$

b. Pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\\ I_n &\leqslant \Big[x\Big]_0^1\\ I_n &\leqslant 1\end{aligned}$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x, on a $(x^n)^2 \geqslant 0$ donc

$$\begin{aligned}1 - \left(x^n\right)^2 &\leqslant 1\\ \left(1-x^n\right)\left(1+x^n\right) &\leqslant 1\\ 1 - x^n &\leqslant \frac{1}{1+x^n} \quad \text{car } 1 + x^n > 0\end{aligned}$$

5. Une primitive de $x \longmapsto 1$ est $x \longmapsto x$ et une primitive de $x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ donc

$$\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - 0 = \frac{n}{n+1}$$

6. On a vu que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel x de $[0\,;\,1]$,

$$\begin{aligned}1 - x^n \leqslant &\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1\\ \int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 &\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\\ \frac{n}{n+1} \leqslant &\, I_n \leqslant 1\end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

EXERCICE 3

1. D'après la calculatrice, $p(X \geqslant 74) \approx 0,023$ à 10^{-3} près.
La probabilité il ne puisse pas répondre à la demande vaut environ 0,023 à 10^{-3} près.

2. On cherche le réel a tel que $p(X \geqslant a) = 0,04$, c'est à dire $p(X \leqslant a) = 0,96$, d'après la calculatrice $a \approx 71,008$.
Le gérant doit stocker 72 packs dans sa réserve pour limiter à 4 % le risque de rupture de stock.

Correction DS 9 D

EXERCICE 1 *d'après Amérique du nord mai 2014*

Partie A : Conditionnement des pots

1. D'après la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0,221$ à 10^{-3} près.
   La probabilité qu'un pot de crème soit non conforme vaut environs 0,221 à 10^{-3} près.

2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. D'après la calculatrice, une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,05$ est $u \approx -1,645$.
   c. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{array}{rcrcl} p(X \leqslant 49) = 0,05 & \Leftrightarrow & p(X-50 \leqslant -1) & = & 0,05 \\ & \Leftrightarrow & p\left(\dfrac{X-50}{\sigma'} \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) & = & 0,05 \\ & \Leftrightarrow & p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) & = & 0,05 \\ & \Leftrightarrow & -\dfrac{1}{\sigma'} & = & -1,645 \\ & \Leftrightarrow & \sigma' & = & \dfrac{1}{1,645} \approx 0,608 \end{array}$$
   La valeur attendue de σ' est donc $0,608$.

3. **a.** On a une épreuve de Bernoulli qui consiste à tester si un pot est non conforme de probabilité $0,05$.
   On répète 2000 fois cette épreuve de façon indépendante. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de pots non conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0,05$.
   b. Son espérance vaut : $\mu'' = np = 2000 \times 0,05 = 100$
   Son écart type vaut : $\sigma'' = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2000 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{95} \approx 9,747$.
   c. Comme $n = 2000 > 30$, $np = 100 > 5$ et $n(1-p) = 1900$ on peut utiliser le théorème de Moivre-Laplace :
   $$\begin{aligned} p(Y \leqslant 80) &= p(Y \leqslant 80,5) \qquad \text{correction de continuité} \\ &= p\left(\frac{Y-\mu''}{\sigma''} \leqslant \frac{80,5-100}{\sqrt{95}}\right) \\ &\approx p(Z' \leqslant -2,001) \text{où } Z' \text{suit la loi } \mathcal{N}(0;1) \\ &\approx 0,023 \end{aligned}$$
   La probabilité que la boutique reçoive au plus 80 pots non conformes vaut environ 0,023.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $\left[0,622; 0,792\right]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

On peut estimer que la proportion de personnes satisfaites est comprise entre 62,2% et 79,2%

EXERCICE 2 *Asie juin 2014*

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1]$, $1 + x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.
   Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   D'après le graphique, le domaine se rapproche du carré d'une unité de côté, l'aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. Si on pose $u(x) = 1 + x^n$, on remarque que $\dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ or $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{u'}{u}$ donc

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

3. **a.** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$ on a :

$$\begin{aligned} x^n &\geqslant 0 \\ 1 + x^n &\geqslant 1 \\ \frac{1}{1+x^n} &\leqslant 1 \quad \text{car la fonction inverse est décroissante} \end{aligned}$$

b. Pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ I_n &\leqslant \Big[x\Big]_0^1 \\ I_n &\leqslant 1 \end{aligned}$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x, on a $(x^n)^2 \geqslant 0$ donc

$$\begin{aligned} 1 - \left(x^n\right)^2 &\leqslant 1 \\ \left(1 - x^n\right)\left(1 + x^n\right) &\leqslant 1 \\ 1 - x^n &\leqslant \frac{1}{1+x^n} \quad \text{car } 1 + x^n > 0 \end{aligned}$$

5. Une primitive de $x \longmapsto 1$ est $x \longmapsto x$ et une primitive de $x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ donc

$$\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - 0 = \frac{n}{n+1}$$

6. On a vu que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel x de $[0\,;\,1]$,

$$\begin{aligned} 1 - x^n \leqslant &\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1 \\ \int_0^1 (1 - x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant &\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ \frac{n}{n+1} \leqslant &I_n \leqslant 1 \end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

EXERCICE 3

1. D'après la calculatrice, $p(X \geqslant 82) \approx 0{,}032$ à 10^{-3} près.

La probabilité il ne puisse pas répondre à la demande vaut environ 0,032 à 10^{-3} près.

2. On cherche le réel a tel que $p(X \geqslant a) = 0{,}05$, c'est à dire $p(X \leqslant a) = 0{,}95$, d'après la calculatrice $a \approx 79{,}4$.

Le gérant doit stocker 80 packs dans sa réserve pour limiter à 5 % le risque de rupture de stock.