Mathématiques DS 9 G

mercredi 22 avril 2015

EXERCICE 1 *8,5 points*

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 100 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 110 mL.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 98 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$.

   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 100$. On veut réduire à $0,04$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-100}{\sigma'}$

   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,04$.

   c. En déduire la valeur attendue de σ'.
3. Une boutique commande à son fournisseur 2000 pots de cette nouvelle crème. La production de l'entreprise est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ceci comme un tirage de 2000 pots avec remise.

   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,04$.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 2000 pots reçus.

   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Y.

   b. Calculer son espérance et son écart type.

   c. A l'aide de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, calculer une valeur approchée de la probabilité que la boutique reçoive au plus 70 pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 150 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

EXERCICE 2 *7,5 points*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

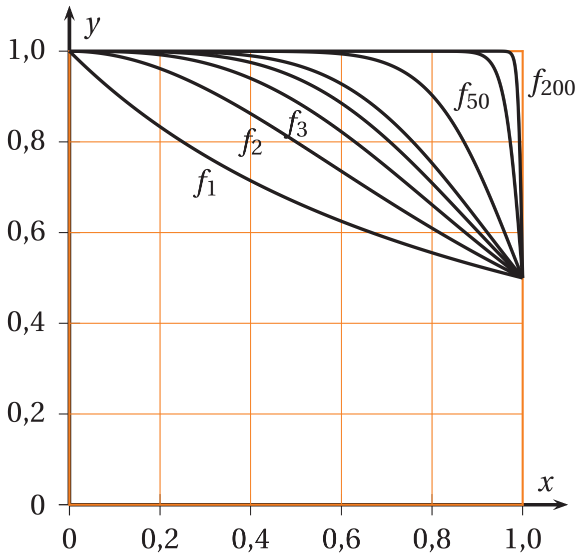
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\mathrm{d}x$.

6. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 *3 points*

Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparait que le nombre X de packs vendus chaque jour suit une loi normale de moyenne 50 et d'écart type 12.

1. Le gérant ne peut pas stocker plus de 74 packs dans sa réserve. Avec un tel stock, quelle serait la probabilité qu'un jour donné il ne puisse pas répondre à la demande (Rupture de stock) ?

2. Il ne souhaite pas remplir entièrement la réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 4 % le risque de rupture de stock. Quel doit-être au minimum son stock quotidien ?

∾ Mathématiques DS 9 D ∾

mercredi 22 avril 2015

EXERCICE 1 *8,5 points*

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,3$.

   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à $0,05$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$

   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,05$.

   c. En déduire la valeur attendue de σ'.

3. Une boutique commande à son fournisseur 2000 pots de cette nouvelle crème. La production de l'entreprise est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ceci comme un tirage de 2000 pots avec remise.

   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,05$.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 2000 pots reçus.

   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Y.

   b. Calculer son espérance et son écart type.

   c. A l'aide de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, calculer une valeur approchée de la probabilité que la boutique reçoive au plus 80 pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

EXERCICE 2 *7,5 points*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

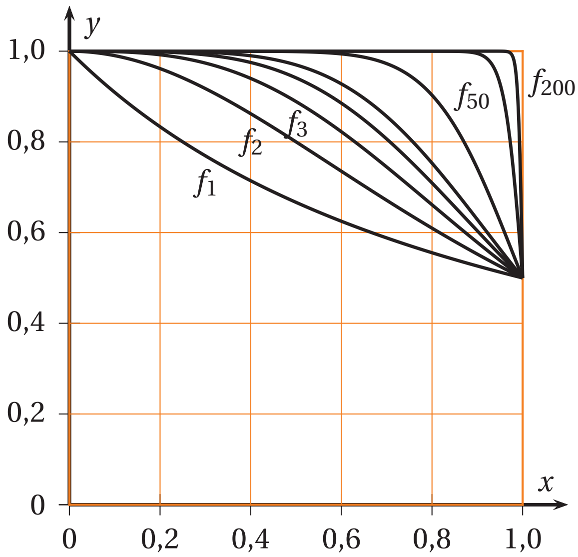
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

6. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 *3 points*

Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparait que le nombre X de packs vendus chaque jour suit une loi normale de moyenne 58 et d'écart type 13.

1. Le gérant ne peut pas stocker plus de 82 packs dans sa réserve. Avec un tel stock, quelle serait la probabilité qu'un jour donné il ne puisse pas répondre à la demande (Rupture de stock) ?

2. Il ne souhaite pas remplir entièrement la réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 5 % le risque de rupture de stock. Quel doit-être au minimum son stock quotidien ?