ೲ Le produit scalaire ೲ

Table des matières

I) Définitions et propriétés **1**
- a) Norme d'un vecteur . . . 1
- b) Produit scalaire de deux vecteurs . . . 1
- c) Autres expressions du produit scalaire . . . 2
  - 1) Expression analytique du produit scalaire . . . 2
  - 2) En fonction l'angle des vecteurs . . . 2

II) Propriétés du produit scalaire **2**
- a) Symétrie et bilinéarité . . . 2
- b) Orthogonalité . . . 3

III) Application du produit scalaire **3**
- a) Calculer de longueurs et des angles . . . 3
  - 1) Théorème de Pythagore généralisé . . . 3
  - 2) Théorème de la médiane . . . 4
- b) Equation cartésienne de cercle . . . 4
- c) Trigonométrie . . . 4
  - 1) Les formules d'addition . . . 4
  - 2) Les formules de duplication . . . 5

I) Définitions et propriétés

a) Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, et soit A etB deux points du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$
La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, est la longueur du segment [AB]. On a :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB.$$

Propriété

Dans un repère **orthonormé**, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan.

— Pour tout nombre réel k, on a $\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k| \left\|\overrightarrow{u}\right\|$;

— $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{u}\right\| + \left\|\overrightarrow{v}\right\|$ (Inégalité triangulaire) ;

— $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Calculer une norme dans un repère orthonormé

Soit A(2 ; −2) et B(−1 ; 2) deux points dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $-\overrightarrow{u}$ et $3\overrightarrow{u}$.

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

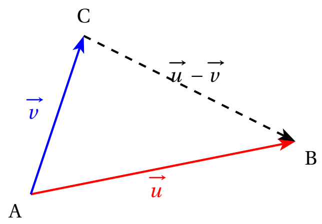
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2\right).$$

Remarque :

Soit A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$



c) Autres expressions du produit scalaire

1) Expression analytique du produit scalaire

Théorème

Dans un repère **orthonormé**, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Carré scalaire

Pour tout $\overrightarrow{u}$ on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^{\,2} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$

2) En fonction l'angle des vecteurs

Propriété

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux **vecteurs non nuls** alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Remarque :
Dans la pratique, on utilise une mesure θ de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

II) Propriétés du produit scalaire

a) Symétrie et bilinéarité

Propriété

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ étant des vecteurs du plan et k étant un nombre réel.

— $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$;
— $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$;
— $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

Egalités remarquables

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs du plan et k étant un nombre réel.

— $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$;

— $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.

b) Orthogonalité

Définition

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ étant deux vecteurs non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** signifie que les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**.

Par **convention**, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Propriété caractéristique

Dire que deux vecteurs sont **orthogonaux** équivaut à dire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$$

III) Application du produit scalaire

a) Calculer de longueurs et des angles

1) Théorème de Pythagore généralisé

Théorème

ABC est un triangle quelconque.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Démonstration

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Donc $BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \cdots$

2) Théorème de la médiane

Théorème

ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de [BC]. La longueur de la médiane AI vérifie :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$$

b) Equation cartésienne de cercle

Propriété

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \mathrm{R}^2$$

c) Trigonométrie

1) Les formules d'addition

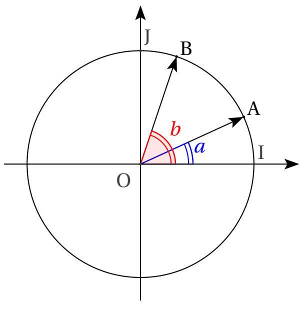
Propriété

Quels que soient les nombres a et b :

— $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

— $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration



Démonstration

Dans le repère $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$

Pour établir la première formule, il suffit d'écrire le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ de deux façons différentes en remarquant que l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}; \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ vaut $b - a$.

2) Les formules de duplication

Propriété

Quels que soient les nombres a et b :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$