Le produit scalaire et ses applications

Lycée du golfe de Saint Tropez

Année 2017/2018

I) Définitions et propriétés
a) Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, et soit A et$B$ deux points du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, est la longueur du segment $[AB]$. On a:

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB.$$

I) Définitions et propriétés
a) Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, et soit A et$B$ deux points du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, est la longueur du segment $[AB]$. On a:

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB.$$

Propriété

Dans un repère **orthonormé**, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriétés

Propriétés

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan.

- Pour tout nombre réel k, on a $\left\|\overrightarrow{k\,u}\right\| = |k| \left\|\overrightarrow{u}\right\|$;
- $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{u}\right\| + \left\|\overrightarrow{v}\right\|$ (Inégalité triangulaire);
- $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Calculer une norme dans un repère orthonormé

Soit $A(2\;;\;-2)$ et $B(-1\;;\;2)$ deux points dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $-\overrightarrow{u}$ et $3\overrightarrow{u}$.

Calculer une norme dans un repère orthonormé

Soit $A(2\ ;\ -2)$ et $B(-1\ ;\ 2)$ deux points dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $-\overrightarrow{u}$ et $3\overrightarrow{u}$.
Correction:
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\2-(-2)\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.
On utilise la formule du cours :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

De plus, pour tout réel k, on a $\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k|\left\|\overrightarrow{u}\right\|$.
Par conséquent, $\left\|-\overrightarrow{u}\right\| = |-1|\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| = 5$
et $\left\|3\overrightarrow{u}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 15$.

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2\right).$$

b) Produit scalaire de deux vecteurs

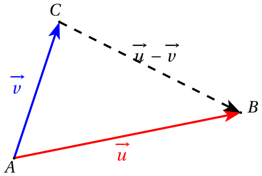
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2\right).$$

Remarque:
Soit A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ on a:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$



c) Autres expressions du produit scalaire
1) Expression analytique du produit scalaire

Théorème: Expression dans un repère orthonormé

Dans un repère **orthonormé**, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

c) Autres expressions du produit scalaire
1) Expression analytique du produit scalaire

Théorème: Expression dans un repère orthonormé

Dans un repère **orthonormé**, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Carré scalaire

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$ s'appelle le **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Pour tout $\overrightarrow{u}$ on a: $\overrightarrow{u}^2 = \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2$

2) En fonction de l'angle des vecteurs

Autre expression

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux **vecteurs non nuls** alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Remarque:
Dans la pratique, on utilise une mesure θ de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Faire les exercices 1, 2, 5 et 7 page 220

II) Propriétés du produit scalaire
a) Symétrie et bilinéarité

Propriétés

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ étant des vecteurs du plan et k étant un nombre réel.

- $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$;
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$;
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$.

II) Propriétés du produit scalaire
a) Symétrie et bilinéarité

Propriétés

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ étant des vecteurs du plan et k étant un nombre réel.

- $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$;
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$;
- $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$.

Egalités remarquables

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant des vecteurs du plan et k étant un nombre réel.

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ soit $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$;
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$ soit $\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$.

Faire les exercices 45, 47 et 52 page 230

b) Orthogonalité

Définition

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ étant deux vecteurs non nuls, dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**.

Par **convention**, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.

Propriété caractéristique

Dire que deux vecteurs sont **orthogonaux** équivaut à dire que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

$$(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Faire les exercices 16 page 223 et les exercices 56,58 et 60 page 231

a) Calculer de longueurs et des angles

Théorème de Pythagore généralisé

ABC est un triangle quelconque.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

a) Calculer de longueurs et des angles

Théorème de Pythagore généralisé

ABC est un triangle quelconque.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Démonstration

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Donc $BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \cdots$

Faire les exercices 1, 2 et 4 page 245

Théorème de la médiane

ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de $[BC]$. La longueur de la médiane AI vérifie:

$$AB^2 + AC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

b) Equation cartésienne de cercle

Propriété

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Une équation du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

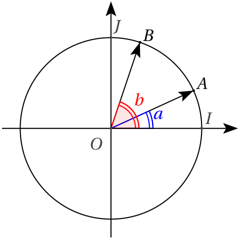
c) Trigonométrie

Les formules d'addition

Quels que soient les nombres a et b :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration



Démonstration

Dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives:

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$

Pour établir la première formule, il suffit d'écrire le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes en remarquant que l'angle $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$ vaut $b-a$.

Les formules de duplication

Quels que soient les nombres a et b :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$